

УДК 621.3.015.4  
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-1-75-80

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ КОНТУР КАК ОБОБЩЕНИЕ ОБЫЧНОГО КОНТУРА

© Н.Д. Бирюк<sup>1)</sup>, О.С. Хорпяков<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Воронежский государственный университет  
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1  
E-mail: lidia@vmail.ru

<sup>2)</sup> Международный институт компьютерных технологий  
394026, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Солнечная, 29б  
E-mail: al17183@yandex.ru

Общеизвестна актуальность анализа нелинейных радиоцепей. Первым шагом такого анализа, согласно принципу линейного включения, является расчет линейных параметрических цепей. Параметрический контур – простое по структуре звено, на примере которого проявляются особенности параметрических цепей общего вида. Обычный контур – частный случай параметрического контура. Ниже предложен метод анализа параметрического контура, отталкивающийся от хорошо известного анализа обычного контура и нацеленный на анализ параметрической цепи общего вида.

*Ключевые слова:* колебательный контур; параметрический контур общего вида; вынужденные колебания; свободные колебания, устойчивость параметрического контура; функции Хилла; обобщение

Под параметрическим контуром общего вида подразумевается линейный контур, схема которого представлена на рис. 1.

Элементы контура считаются непрерывными периодическими функциями времени с одинаковыми периодами, эти функции не зависят от протекающих токов (условие линейности);  $i_3(t)$  – задающий ток,  $u_3(t)$  – задающее напряжение, считаются гармоническими функциями с одинаковыми частотами. Для параметрического контура характерны возмущающие функции более общего вида, функции Хилла. Данный контур объединяет свойства последовательного и параллельного контуров.

Первый и второй законы Кирхгофа позволяют получить математическую модель в виде линейной системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= -\frac{G}{C}q - \frac{1}{L}\phi + i_3(t) \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{1}{C}q - \frac{R}{L}\phi + u_3(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

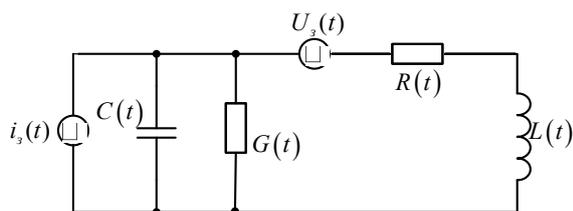


Рис. 1. Схема обобщенного параметрического контура

Здесь  $q = q(t)$  – заряд конденсатора,  $\phi = \phi(t)$  – потокосцепление индуктивности. Эту систему для удобства математических преобразований желательно представить в нормированном виде. С этой целью введем постоянные масштабные делители времени  $t_m$ , заряда  $q_m$ , магнитного потока  $\phi_m$  и перейдем к безразмерным переменным времени  $\tau = \frac{t}{t_m}$ , заряда

$$x_1 = \frac{q}{q_m} \text{ и магнитного потокосцепления } x_2 = \frac{\phi}{\phi_m}.$$

В новых переменных предыдущая система уравнений примет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= -\frac{t_m G(\tau)}{C(\tau)}x_1 - \frac{t_m r}{L(\tau)}x_2 + \frac{t_m}{q_m}i_3(\tau) \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \frac{t_m}{rC(\tau)}x_1 - \frac{t_m R(\tau)}{L(\tau)}x_2 + \frac{t_m}{\phi_m}u_3(\tau) \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где  $r = \frac{\phi_m}{q_m}$  – нормирующее сопротивление. Обратный переход к исходной системе легко достигается заменой  $t_m = 1$ ,  $q_m = 1$ ,  $\phi_m = 1$ ,  $r = 1$ ,  $\tau = t$ ,  $x_1 = q$ ,  $x_2 = \phi$ .

Система (2) может быть представлена в компактном векторном виде

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{x} = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{x} + \mathbf{f}(\tau),$$

где  $A(\tau) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  – матрица системы:

$$a_{11} = -\frac{t_M G}{C}, \quad a_{12} = -\frac{t_M r}{L}, \quad a_{21} = \frac{t_M}{rC}, \quad a_{22} = -\frac{t_M R}{L};$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  – неизвестный вектор-столбец;

$f(\tau) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$  – свободный вектор-столбец:

$$f_1 = \frac{t_M}{q_M} i_3(\tau), \quad f_2 = \frac{t_M}{\phi_M} u_3(\tau).$$

Сначала предположим, что контур на рис. 1 – с постоянными параметрами и возмущающие функции – гармонические:

$$i_3(t) = I_{m3} \cos(\omega t + \varphi_i) \\ u_3(t) = U_{m3} \cos(\omega t + \varphi_u).$$

Для отыскания вынужденных колебаний удобно применить метод комплексных амплитуд, который затем можно использовать и для анализа параметрического контура. При этом, однако, возникают некоторые особенности, в связи с чем оказалось удобным выбрать вариант метода, разработанный профессором Ю.Т. Величко [1]. Ключевые особенности варианта: гармонические функции времени представляются только в виде косинусов, каждой гармонической функции (оригиналу) ставится в соответствии комплекснозначная показательная функция (изображение). Это позволяет существенно упростить промежуточные преобразования. При выбранных исходных допущениях все вынужденные функции процесса являются гармоническими. Ключевые функции имеют вид

$$q(t) = Q_m \cos(\omega t + \varphi_q), \quad \phi(t) = \phi_m \cos(\omega t + \varphi_\phi).$$

Если они известны, то все прочие функции процесса  $i_c(t)$ ,  $u_c(t)$ ,  $i_L(t)$ ,  $u_L(t)$  находятся без решения дифференциальных уравнений. По методу комплексных амплитуд в выбранном варианте, например, заряд представляется следующим образом:

$$q(t) = Q_m(\omega t + \varphi_q) \leftarrow \hat{q} = Q_m e^{j(\omega t + \varphi_q)} = \\ = Q_m e^{j\varphi_q} e^{j\omega t} = \dot{Q}_m e^{j\omega t},$$

где  $\dot{Q}_m = Q_m e^{j\varphi_q}$  – комплексная амплитуда заряда,  $q(t)$  – оригинал;  $\hat{q}$  – изображение, соответствие представлено стрелкой острием к оригиналу. Обратный переход от изображения к оригиналу весьма прост

$$q(t) = \operatorname{Re} \hat{q},$$

здесь оператор  $\operatorname{Re}$  означает взятие действительной части. Если известна комплексная амплитуда, то не-

трудно построить изображение –  $\hat{q} = \dot{Q}_m e^{j\omega t}$ .

Кроме изображения  $\hat{q}$  применяется соответствующее ему комплексно сопряженное изображение

$$\check{q} = Q_m^* e^{-j\omega t},$$

где  $Q_m^* = Q_m e^{-j\varphi_q}$  – сопряженная комплексная амплитуда.

Метод комплексных амплитуд позволяет дифференциальную систему относительно мгновенных значений  $q(t)$ ,  $\phi(t)$  перевести в алгебраическую систему относительно комплексных амплитуд

$$\left. \begin{aligned} j\omega \dot{Q}_m &= -\frac{G}{C} \dot{Q}_m - \frac{1}{L} \phi_m + \dot{I}_{m3} \\ j\omega \dot{\phi}_m &= \frac{1}{C} \dot{Q}_m - \frac{R}{L} \phi_m + \dot{U}_{m3} \end{aligned} \right\}.$$

Имеем линейную неоднородную алгебраическую систему двух уравнений, каноническая запись которой следующая:

$$\left. \begin{aligned} \left( j\omega + \frac{G}{C} \right) \dot{Q}_m + \frac{1}{L} \phi_m &= \dot{I}_{m3} \\ -\frac{1}{C} \dot{Q}_m + \left( j\omega + \frac{R}{L} \right) \dot{\phi}_m &= \dot{U}_{m3} \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Из этой системы однозначно находятся комплексные амплитуды заряда  $\dot{Q}_m$  и магнитного потокоцепления  $\dot{\phi}_m$ . Для этого необходимо и достаточно неравенства нулю определителя системы, т. е.

$$\det \begin{pmatrix} j\omega + \frac{G}{C} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & j\omega + \frac{R}{L} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (4)$$

В реальных (невыврожденных) контурах это условие всегда выполняется.

Значительно реже метод комплексных амплитуд применяется при анализе свободных колебаний контура. Здесь он тоже приводит к значительным упрощениям. Свободный процесс описывается однородной алгебраической системой (3), т. е. при условии  $\dot{I}_{m3} = 0$ ,  $\dot{U}_{m3} = 0$ . Эта система может иметь ненулевые решения только в том случае, когда ее определитель (4) равен нулю. Запишем это условие, представляя определитель в раскрытом виде

$$\left( j\omega + \frac{G}{C} \right) \left( j\omega + \frac{R}{L} \right) + \frac{1}{LC} = 0.$$

Это – квадратное алгебраическое уравнение относительно  $j\omega$ , канонический вид которого следующий:

$$(j\omega)^2 + \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right)j\omega + \frac{1+GR}{LC} = 0.$$

При решении этого уравнения получается комплексная частота

$$\dot{\omega} = \omega_c + j\alpha, \quad (5)$$

где  $\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \left(G\rho - \frac{R}{\rho}\right)^2}$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – собственная частота контура,  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$  – его характеристическое сопротивление. Комплексная частота  $\dot{\omega}$  содержит важную информацию: ее действительная часть  $\omega_c$  – частота свободных колебаний, а мнимая  $\alpha$  – коэффициент затухания. Действительно, классические методы отыскания свободных колебаний для заряда дают следующую формулу

$$q(t) = Q_m e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \varphi_q),$$

где  $Q_m$ ,  $\varphi_q$  определяются из начальных условий. Для других функций процесса частота  $\omega_c$  может быть другой, но коэффициент затухания  $\alpha$  – один и тот же.

$$q(t) = Q_m e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \varphi_q),$$

где  $Q_m$ ,  $\varphi_q$  определяются из начальных условий. Для других функций процесса частота  $\omega_c$  может быть другой, но коэффициент затухания  $\alpha$  – один и тот же.

Таким образом, мнимая часть  $\alpha$  комплексной частоты  $\dot{\omega}$  несет полную информацию об устойчивости контура. Именно:

1) если  $\alpha > 0$ , то свободный процесс затухающий (контур асимптотически устойчив);

2) если  $\alpha < 0$ , то свободный процесс безгранично во времени возрастающий (контур неустойчив);

3) если  $\alpha = 0$ , то свободный процесс колеблющийся в ограниченных пределах (контур неасимптотически устойчив).

Для обычного контура этот вопрос неактуален, поскольку факт устойчивости контура при  $G > 0$ ,  $R > 0$  легко устанавливается из энергетических соображений. Однако для параметрического контура такой подход привлекателен, т. к. позволяет разработать нелинейный метод анализа устойчивости контура.

Перейдем к параметрическому контуру. Будем считать, что его элементы изменяются во времени с круговой частотой  $\Omega$ , а возмущающие функции – гармонические с круговой частотой  $\omega$ . Получится существенное усложнение, связанное с тем, что место гармонической функции в обычном контуре займет непредставимая в элементарных функциях функция Хилла. Проще представить ее изображение

$$\hat{x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{x}_k e^{j(\omega+k\Omega)t}, \quad (6)$$

где  $\dot{x}_k$  – вектор второго порядка соответствующей комплексной амплитуды, в нормированной системе (2) частоты  $\bar{\omega} = \omega t_M$  и  $\bar{\Omega} = \Omega t_M$  безмерные, для упроще-

ния они обозначены через  $\bar{\omega}$  и  $\bar{\Omega}$ , как и обычные частоты.

С целью уменьшения громоздкости анализа будем считать, что матрица  $A(\tau)$  в (2) состоит из двух слагаемых: постоянной матрицы  $A_0$  и гармонической матрицы  $A_1$  с круговой частотой  $\Omega$ . В общем случае матрицу  $A(\tau)$  можно разложить в ряд Фурье, тогда она представляется суммой бесконечного числа слагаемых. Однако и в нашем частном случае получится характеристика параметрического контура общего вида, т. к. предложенный метод оказывается открытым для обобщений в разных направлениях.

Изображение уравнения (2) параметрического контура общего вида

$$\frac{d}{d\tau} x = \frac{1}{2} \left( \hat{A} + \check{A} \right) \hat{x} + \hat{f}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{j(\omega+k\Omega)\tau}, \\ \hat{x} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{x}_k e^{j(\omega+k\Omega)\tau}, \\ \frac{d}{d\tau} \hat{x} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} j(\omega+k\Omega) \dot{x}_k e^{j(\omega+k\Omega)\tau}. \end{aligned} \quad (8)$$

В нашем частном случае векторное дифференциальное уравнение (7) примет вид

$$\frac{d}{d\tau} \hat{x} = \left[ A_0 + \frac{1}{2} \left( A_1 e^{-j\Omega\tau} + \check{A}_1 e^{j\Omega\tau} \right) \right] \hat{x} + \dot{f}_m e^{j\omega\tau}. \quad (9)$$

Формулы (8) и в этом случае остаются справедливыми. Если подставить (8) в (9), то после преобразования получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[ j(\omega+k\Omega) - A_0 \right] \dot{x}_k - \frac{1}{2} \left( A_1 \dot{x}_{k+1} + \check{A}_1 \dot{x}_{k-1} \right) \right\} e^{j(\omega+k\Omega)\tau} = \dot{f}_m e^{j\omega\tau}. \quad (10)$$

Если в левой части сделать выборку членов с одинаковыми экспоненциальными множителями (эти множители сократятся), то получим бесконечную систему уравнений

$$\text{при } k=0: -\frac{1}{2} \dot{A}_1 \dot{x}_{-1} + (j\omega - A_0) \dot{x}_0 - \frac{1}{2} \check{A}_1 \dot{x}_1 = \dot{f}_m,$$

при  $k \neq 0$ :

$$-\frac{1}{2} \dot{A}_1 \dot{x}_{k-1} + [j(\omega+k\Omega) - A_0] \dot{x}_k - \frac{1}{2} \check{A}_1 \dot{x}_{k+1} = 0.$$

Структура этой бесконечной системы проясняется, если ее представить в векторном виде, а ее матрицу – в клеточном виде:



устойчивости контура. Если мнимая часть положительная, то контур асимптотически устойчив, если отрицательная, то неустойчив, если равна нулю, то неасимптотически устойчив. Отсюда вытекает неляпуновский метод анализа устойчивости контура.

Уравнение (12) имеет ненулевые решения в случае

$$\det \frac{1}{2} \left( \hat{A} + \overset{\vee}{A} \right) = 0. \quad (15)$$

Следовательно, нужно подобрать комплексную частоту  $\hat{\omega}$  так, чтобы уравнение (15) выполнялось. По мнимой части этой частоты можно судить об устойчивости контура. Поскольку определитель (15) бесконечного порядка, то точно решить задачу об устойчивости невозможно. Можно применить метод редукции, ограничив порядок определителя. Тогда задача об устойчивости может быть решена приближенно с тем большей точностью, чем больше порядок оставленного определителя.

### ОБОБЩЕНИЯ

Предложенный метод может быть обобщен на параметрические цепи общего вида. Для любой параметрической цепи (с периодическими параметрами) по законам Кирхгофа можно получить математическую модель типа (1) в виде системы  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка. Если изменения во времени параметров ограничить первой гармоникой, то получим бесконечную блочную систему алгебраических уравнений типа (11), но элементы бесконечной матрицы будут представлять собой матрицы порядка  $n \times n$ .

Если изменения параметров цепи не ограничивать конечным числом гармоник, то матрица в системе (11) будет заполненной (все элементы ненулевые). Некото-

рые параметрические цепи более общего характера рассмотрены в монографии [3].

Наконец, согласно принципу линейного включения [4] параметрические цепи органически связаны с нелинейными цепями. По нашему мнению, принцип линейного включения незаслуженно редко используется в радиоэлектронике, хотя его методологическое значение трудно переоценить. По общности ему нет равного, поскольку он охватывает все множество нелинейных систем. Он утверждает, что любое решение нелинейного уравнения может быть **точно реализовано** в специально подобранном линейном уравнении. Это значит, что если взять все множество линейных векторных уравнений, с одной стороны, и множество нелинейных векторных уравнений – с другой, то все множество решений тех и других одинаково.

В заключение заметим, что в учебнике И.С. Гоноровского рассмотрен параметрический контур более частного вида применительно к задачам параметрического усиления [5]. Задача устойчивости приводится к уравнению Матъе, для которого построена карта областей устойчивости и неустойчивости. При более широком подходе уравнение Матъе оказывается слишком частным, при этом путей его обобщения не видно.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Величко Ю.Т.* Теоретичні основи радіотехнічних мереж. Львів: Видав. ЛДУ, 1966. 340 с.
2. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. Москва; Ленинград: Госфизматгиздат, 1962. 708 с.
3. *Бирюк Н.Д., Юргелас В.В.* Основы теории параметрических радиоцепей. Воронеж: Изд.-полиграф. центр ВГУ, 2012. 345 с.
4. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немецкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 582 с.
5. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Сов. радио, 1967. Ч. 1. 439 с.

Поступила в редакцию 1 февраля 2017 г.

Бирюк Николай Данилович, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры экспериментальной физики, e-mail: lidia@vmail.ru

Хорпяков Олег Станиславович, Международный институт компьютерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент кафедры информационной безопасности и средств связи, e-mail: all17183@yandex.ru

UDC 621.3.015.4

DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-1-75-80

## PARAMETER CONTOUR AS GENERALIZATION OF USUAL CONTOUR

© N.D. Birjuk<sup>1)</sup>, O.S. Khorpyakov<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Voronezh State University

1 Universitetskaya Sq., Voronezh, Russian Federation, 394018

E-mail: lidia@vmail.ru

<sup>2)</sup> International Institute of Computer Technologies

29 b Solnechnaya St., Voronezh, Russian Federation, 394026

E-mail: al17183@yandex.ru

The actuality of nonlinear radio circuits' analysis is generally known. According to principle of linear including, analysis of linear time varying circuit is the first step of such analysis. The parameter contour is a simple structuring link of time parametric contour of general kind in which features of parameter contour is shown. Usual contour is a particular case of time varying circuit. A method of analysis of parameter contour is proposed below, coming from analysis of usual contour but leveling at analysis of parametric circuit of general kind.

*Key words:* oscillatory circuit; parametric contour of general kind; forced oscillation; free process; stability of parametric contour; Hill's function; generalization

### REFERENCES

1. Velichko Yu.T. *Teoretychni osnovy radiotekhnichnyh mrezh.* Lvov, Lvov State University Publ., 1966, 340 p. (In Ukrainian).
2. Kantorovich L.V., Krylov V.I. *Priblizhennyye metody vysshego analiza* [Approximate Methods of Highest Analysis]. Moscow, Leninograd, Gosfizmatizdat Publ., 1962, 708 p. (In Russian).
3. Biryuk N.D., Yurgelas V.V. *Osnovy teorii parametricheskikh radiotsepey* [Fundamentals of Theory of Parametric Radio Circuits]. Voronezh, Publishing-Polygraphic Centre of VGU, 2012, 345 p. (In Russian).
4. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskiy V.V. *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [Theory of Lyapunov's Indices and its Application to the Questions of Stability]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 582 p. (In Russian).
5. Gonorovskiy I.S. *Radiotekhnicheskie tsepi i signaly* [Radio-Technical Circuits and Signals]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1967, pt. 1, 439 p. (In Russian).

Received 1 February 2017

Birjuk Nikolaj Danilovich, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Experimental Physics Department, e-mail: lidia@vmail.ru

Khorpyakov Oleg Stanislavovich, International Institute of Computer Technology, Voronezh, Russian Federation, Candidate of Technics, Associate Professor of Information Security and Communication Systems Department, e-mail: al17183@yandex.ru

### Информация для цитирования:

Бирюк Н.Д., Хорпяков О.С. Параметрический контур как обобщение обычного контура // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 1. С. 75-80. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-22-1-75-80

Birjuk N.D., Khorpyakov O.S. Parametricheskij kontur kak obobshhenye obychnogo kontura [Parameter contour as generalization of usual contour]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 1, pp. 75-80. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-1-75-80 (In Russian).